付随式を用いる1階述語論理の証明図作成方法 (形式言語理論とオートマトン理論)

数理解析研究所講究録
458巻 1982年 30-39

付随式を用いる1階述語論理の証明図作成方法

名工大 工　大芝 猛
永田周郎
舟橋 栄

本稿では与えられた論理式Aに対し，冠頭標準形変形を経由せずに妥当性検証を行い（手続きCHK），その検証が肯定的に終了したときに得られる情報をguideとして，論理式AのLK証明図を下から上方へ決定論的に手もどりなく書き上げる（アルゴリズムPAL）方法を述べる。

(0) そのために先ず，任意のLK論理式A（冠頭でなくてよい）に対し，Aのquantifierに以下のようにguide index form (X_i), $[f_j(X_{i_1},\cdots,X_{i_k})]$ を付してうるAの付随式 $\tilde{A}\langle X_1,\cdots,X_n\rangle$ (adjoint formula) を用意する。

① Aのnegative $\forall$ とpositive $\exists$ 全体が左から $\alpha_1 x_1, \cdots, \alpha_n x_n$ であるとき，これらに (X_i) を付し $\alpha_1 \underset{(X_1)}{x_1}, \cdots, \alpha_n \underset{(X_n)}{x_n}$ とする。（但し X_i は証明図作成時にtermを代入すべき表示変数である。）また更にAのpositive $\forall$ とnegative $\exists$ 全体が左から $\beta_1 y_1, \cdots \beta_\ell y_\ell$

であるとき，$[f_j(\ )]$ を付し $\underset{[f_1(\ )]}{\mathcal{R}_1 y_1}, \cdots, \underset{[f_\ell(\ )]}{\mathcal{R}_\ell y_\ell}$ としてうる図式を A' とする．（f_j は A にない関数記号（スコーレム関数））．

② A' 内の各 $\underset{[f_j(\ )]}{\mathcal{R}_j y_j}$ に対し「$\underset{[f_j(\ )]}{\mathcal{R}_j y_j}$ を scope に含むような $\underset{(X_i)}{\alpha_i x_i}$ の全体が $A' = \cdots \underset{(X_{i_1})}{\alpha_{i_1} x_{i_1}}(\cdots \underset{(X_{i_k})}{\alpha_{i_k} x_{i_k}}(\cdots \underset{[f_j(\ )]}{\mathcal{R}_j y_j}(\cdots)\cdots)\cdots)\cdots$ と indicate されるならば表示変数の列 $X_{i_1},\cdots,X_{i_k}$ を f_j の argument に埋めて $\underset{[f_j(X_{i_1},\cdots,X_{i_k})]}{\mathcal{R}_j y_j}$ とする」これをすべての $j=1,\cdots,\ell$ について行って得られる図式を <u>$\tilde{A}\langle X_1,\cdots,X_n\rangle$ と書き，A の付随式</u>という．

$\alpha_1 x_1$ (negative $\forall$)　　$\alpha_2 x_2$ (positive $\exists$)

<u>EXAMPLE</u>: $A = \forall y_1 (\neg \forall x_1 ((\exists y_2 p(x_1, y_2)) \vee p(x_1, y_1)) \vee \exists x_2 p(y_1, x_2))$

について，　$\mathcal{R}_1 y_1$ (positive $\forall$)　　$\mathcal{R}_2 y_2$ (negative $\exists$)

$$A' = \underset{[f_1(\ )]}{\forall y_1} (\neg \underset{(X_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(\ )]}{\exists y_2} p(x_1, y_2)) \vee p(x_1, y_1)) \vee \underset{(X_2)}{\exists x_2} p(y_1, x_2))$$

従って $\tilde{A}\langle X_1, X_2\rangle = \underset{[f_1]}{\forall y_1} (\neg \underset{(X_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(X_1)]}{\exists y_2} p(x_1, y_2)) \vee p(x_1, y_1)) \vee \underset{(X_2)}{\exists x_2} p(y_1, x_2))$

以下論理式 A を任意に1つ固定し関連する定義を述べる．

1° (def.) <u>A-formula</u>（論理式 A の証明図作成の途上現われる pseudo-formula）$H(\tilde{A})$ を $\tilde{A}\langle X_1,\cdots,X_n\rangle$ の関数記号と定数記号（なければ1つ追加）から得られる term の全体とする．

(0) $\tau_i \in H(\tilde{A})$ のとき $\tilde{A}\langle \tau_1,\cdots,\tau_n\rangle$ は A-formula (1) $B * C$ が A-formula のとき，B と C も A-formula（但し $*$ は $\vee, \wedge, \supset$, を表わす）．(2) $\neg B$ が A-formula のとき，B も A-formula．(3) $\underset{(\tau)}{\alpha x} B(x)$ が A-formula のとき $B(\tau)$ も A-formula．(4) $\underset{[F]}{\mathcal{R} y} C(y)$ が A-formula のとき，$C(F)$ も A-formula．

2° (def) sb-operation： B が $\tilde{A}\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ または A-formula のとき, $sb(B) \overset{def.}{=}$ B 内の $\left\{ \begin{array}{l} \underset{(\tau_i)}{\alpha_i x_i}(\cdots x_i \cdots) \text{ を代入 } (\cdots x_i \cdots)\binom{x_i}{\tau_i} \\ \underset{[F_j]}{\mathcal{R}_j y_j}(\cdots y_j \cdots) \text{ を代入 } (\cdots y_j \cdots)\binom{y_j}{F_j} \end{array} \right\}$

とみなしてうる quantifire free の論理式.

(EXAMPLE: $sb(\neg \underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2}\ p(f_1, y_2)) = \neg p(f_1, \underline{f_2(f_1)})$, 前例で, $sb(\tilde{A}\langle x_1, x_2\rangle) = \neg(p(x_1, f_2(x_1)) \vee p(x_1, f_1)) \vee p(f_1, x_2)$)

3° (def) cl-operation： $cl(B) =$ B 内の $\underset{(\tau_i)}{\alpha_i x_i}$ を $\alpha_i x_i$ に, $\underset{[F_j]}{\mathcal{R}_j y_j}$ を $\mathcal{R}_j y_j$ に戻してうる LK-formula.

(EXAMPLE：前例につき $cl(\tilde{A}\langle x_1, x_2\rangle) = A$, $cl(\neg \underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2}\ p(f_1, y_2)) = \neg \exists y_2\, p(f_1, y_2)$, また $cl(\tilde{A}\langle f_1, f_2(f_1)\rangle) = A$.)

Herbrand の定理 は次の形で表現される：

$\underset{LK}{\vdash} A \rightleftarrows \exists_{m \geq 1}\ \exists\, \tau_{ij} \in H(\tilde{A})$：

$sb\tilde{A}\langle \tau_{11}, \cdots, \tau_{1n}\rangle \vee \cdots \vee sb\tilde{A}\langle \tau_{m1}, \cdots, \tau_{mn}\rangle$ が恒真

(I) 妥当性検証step (CHK procedure) (P.9. 例参照)

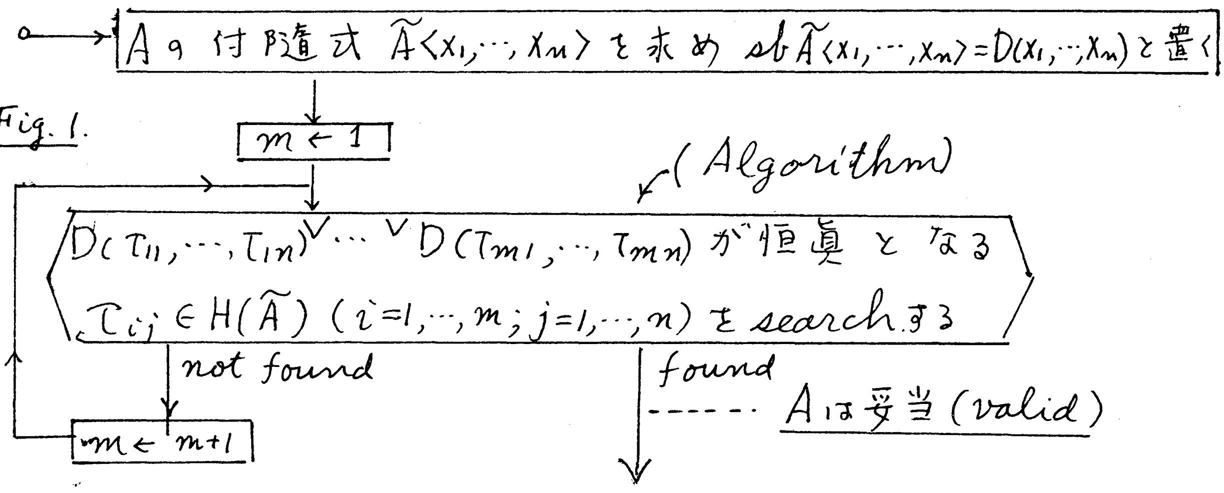

Fig. 1.

得られた情報 $\tau_{11}, \cdots, \tau_{ij}, \cdots, \tau_{mn}$ をもって証明作成 step へ

(II) LK-proof 作成 step (アルゴリズム PAL)

《phase 1》 pseudo-proof の作成: 前 step の肯定時に得られる τ_{ij} から, end sequent $\mathfrak{S}_0 = \to \tilde{A}\langle \tau_{11}, \cdots, \tau_{1n} \rangle, \cdots, \tilde{A}\langle \tau_{m1}, \cdots, \tau_{mn} \rangle$ をつくり, これに US-operation (上式決定操作) を逐次ほどこしてうる sequent を上方へ積み上げ tree 型の pseudo-proof $\mathcal{P}_1 = \mathbb{US}[\to \tilde{A}\langle \tau_{11}, \cdots, \tau_{1n} \rangle, \cdots; \tilde{A}\langle \tau_{m1}, \cdots, \tau_{mn} \rangle]$ を作る. US-operation は下式 $\Gamma \to \Delta$ に対し 2 つ以下の上式

$$US(\Gamma \to \Delta) = \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 \to \Delta_1 \\ \text{or} \\ \Gamma_1 \to \Delta_1 \,;\, \Gamma_2 \to \Delta_2 \\ \text{or} \\ \text{undefined} \end{array} \right\}$$

を決定する操作で, 詳細は P. 6 ～に記載されるが, 各段階で下式 $\Gamma \to \Delta$ 内の guide-index (τ)'s, $[\mathcal{F}]$'s を調べることにより, どの formula をどのように分解し上式を作るかが一意に決定される.

《phase 2》 Index clear step: phase 1 で求めた pseudo-proof $\mathcal{P}_1$ 内の不要となった guide-index を d-operation で消去すれば, $\to \underbrace{A, \cdots, A}_{m}$ に到る LK*-proof: $\mathcal{P}_2 = d(\mathcal{P}_1) = d(\mathbb{US}[\to \tilde{A}\langle \tau_{11}, \cdots, \tau_{1n} \rangle, \cdots; \tilde{A}\langle \tau_{m1}, \cdots, \tau_{mn} \rangle]$ をうる. 但し LK* では LK の $\forall$right, $\exists$left における eigen variable の代りに Skolem term $f_j(\tau_1, \cdots, \tau_k)$ が用いられている点が LK と異なる.

《phase 3》 eigen variable adjustment (α-operation)

phase 2 で得た $\to \underbrace{A, \cdots, A}_{m}$ に到る LK*-proof $\mathcal{P}_2$ 内の各 formula 内の maximal Skolem term $f_j(\tau_1, \cdots, \tau_k)$ を自由変数 $\alpha_{f_j(\tau_1, \cdots, \tau_k)}$ でおきかえる操作により, $\to \underbrace{A, \cdots, A}_{m}$ に到る LK-proof $\mathcal{P}=\alpha(\mathcal{P}_2)=\alpha(d(\mathbb{U}\mathbb{S}[\to\tilde{A}\langle T_{11},\cdots,T_{1n}\rangle,\cdots,\tilde{A}\langle T_{m1},\cdots,T_{mn}\rangle]$ を得る. 従って contruction により $\to A$ に到る(cut-free な) LK-proof をうる. (但し, ある formula B 内の Skolem term $f_j(\tau_1,\cdots,\tau_k)$ は $f_j(\tau_1,\cdots,\tau_k)$ を真に含む他の $f_d(\sigma_1,\cdots,\sigma_p)$ term が B 内にないとき, B で maximal であるという.)

上記証明図作成手続の妥当性は次の定理の形で述べられる.

〚Theorem〛 仮定"$sb\tilde{A}\langle T_{11},\cdots,T_{1n}\rangle\vee\cdots\vee sb\tilde{A}\langle T_{m1},\cdots,T_{mn}\rangle$が恒真"の下で, $\mathcal{P}=\alpha(d(\mathbb{U}\mathbb{S}[\to\tilde{A}\langle T_{11},\cdots,T_{1n}\rangle,\cdots,\tilde{A}\langle T_{m1},\cdots,T_{mn}\rangle]))$ は $\to\underbrace{A,\cdots,A}_{m}$ に到る LK-proof である.

(証明)の概要: $\mathfrak{S}_0=\to\tilde{A}\langle T_{11},\cdots,T_{1n}\rangle,\cdots,\tilde{A}\langle T_{m1},\cdots,T_{mn}\rangle$ に対し US-operation を逐次適用して pseudo-proof $\mathcal{P}_1$ を作るとき各段階で得られる sequent $\Gamma\to\Delta$ につき, $\Gamma\to\Delta$ に論理記号が残っているかぎり必らず上式 $US(\Gamma\to\Delta)$ が定義され,

① 各上式 $\Gamma_1\to\Delta_1$ (or $\Gamma_2\to\Delta_2$) の記号は下式 $\Gamma\to\Delta$ より減少.

② $\dfrac{\alpha d(US(\Gamma\to\Delta))}{\alpha d(\Gamma\to\Delta)}$ は LK-deduction となる.

③ $\dfrac{sb(US(\Gamma\to\Delta))}{sb(\Gamma\to\Delta)}$ は quantifier-free な LK deduction で下式から上式へ向って恒真性が保存される. (但し, sequent $B_1,\cdots,B_m\to C_1,\cdots,C_n$ が恒真であるとは $\neg B_1\vee\cdots\vee\neg B_m\vee C_1\vee\cdots\vee C_n$ が恒真であることとする.). しからば ①より, $\mathcal{P}_1=\mathbb{U}\mathbb{S}[\mathfrak{S}_0]$ の最上部の sequent は原始論理式の列 $P_1,\cdots,P_p\to Q_1,\cdots,Q_q$ なる形であり, しかも仮定と

③より，$P_i = Q_j$ (for some i,j) となる（何故ならば，$sb(\mathcal{P}_1)$ の最下式 $\to sb\tilde{A}\langle \tau_{11},\cdots,\tau_{1n}\rangle,\cdots,sb\tilde{A}\langle \tau_{m1},\cdots,\tau_{mn}\rangle$ は仮定より恒真であり，③に従えば最上部の式 $sb(P_1,\cdots,P_p \to Q_1,\cdots,Q_q)$ 即ち $P_1,\cdots,P_p \to Q_1,\cdots,Q_q$ も恒真となる．即ち $\neg P_1 \vee\cdots\vee \neg P_m \vee Q_1 \vee\cdots\vee Q_n$ が恒真故，直ちに $P_i = Q_j$ (for some i,j) を導びく．従って(i) $\alpha(d(\mathcal{P}_1))$ の最上式である所の $\alpha d(P_1,\cdots,P_p \to Q_1,\cdots,Q_q)$ 即ち $P_1,\cdots,P_m \to Q_1,\cdots,Q_n$ は公理 $P_i \to P_i$ $(P_i = Q_j)$ から導びかれ，(ii) $\alpha(d(\mathcal{P}_1))$ の各段階 $\dfrac{\alpha d(US(\Gamma\to\Delta))}{\alpha d(\Gamma\to\Delta)}$ は②より LK-deduction であり，(iii) $\alpha(d(\mathcal{P}_1))$ は最下式 $\to A,\cdots,A$ に到る．従って $\alpha(d(\mathcal{P}_1))$ は目的の LK-proof を導くことがわかる．

US-operation を定義するに当って term, sequent の degree を定義する：f_j を Skolem 関数 g を A に始めからある関数記号とするとき．

(i) $deg(f_j(\tau_1,\cdots,\tau_k)) = \omega\cdot lg(f_j(\tau_1,\cdots,\tau_k)) + j$,

(ii) $deg(g(\tau_1,\cdots,\tau_k)) = \omega\cdot lg(g(\tau_1,\cdots,\tau_k))$ とする．但し

$lg(h(\tau_1,\cdots,\tau_k)) = lg(\tau_1)+\cdots+lg(\tau_k)+1$, $lg(c)=1$ とする．

また $deg(\Gamma\to\Delta) \begin{cases} = \min\{deg(F) \mid \mathcal{R}_{y[F]} \text{ in } \Gamma\to\Delta\} & ;(\Gamma\to\Delta \text{ が少くとも1つの } \mathcal{R}_{y[F]} \text{ form をもつとき}) \\ = 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

[US-operation の定義]

Case 0. Γ または Δ が同じ formula をもつとき：

0.1. $\underline{US(\Gamma \to \Delta)} \overset{def}{=} \underline{\Gamma_0, D, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_k \to \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_0, D, \Gamma_1, D, \cdots, D, \Gamma_k \to \Delta$ $(k \geqq 2,\ D \notin \Gamma_i)$

0.2 $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma \to \Delta_0, D, \Delta_1, \cdots, \Delta_\ell}$.

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_0, D, \Delta_1, D, \cdots, D, \Delta_\ell$ (Γに同じformulaなく, $\ell \geqq 2,\ D \notin \Delta_i$)

<u>Case 1. Case 0 でなく, Γ, Δ が $B \vee C$, $B \wedge C$, $B \supset C$, $\neg B$ のいずれかをもつとき</u>, その最も左のものをDとする

1.l.1. $\Gamma \ni D = B \vee C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma_1, B, \Gamma_2 \to \Delta\ ;\ \Gamma_1, C, \Gamma_2 \to \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, B \vee C, \Gamma_2 \to \Delta$.

1.l.2. $\Gamma \ni D = B \wedge C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma_1, B, C, \Gamma_2 \to \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, B \wedge C, \Gamma_2 \to \Delta$.

1.l.3. $\Gamma \ni D = B \supset C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma_1, \Gamma_2 \to B, \Delta\ ;\ \Gamma_1, C, \Gamma_2 \to \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, B \supset C, \Gamma_2 \to \Delta$.

1.l.4. $\Gamma \ni D = \neg B$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma_1, \Gamma_2 \to B, \Delta}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, \neg B, \Gamma_2 \to \Delta$.

1.r.1 $\Delta \ni D = B \vee C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma \to \Delta_1, B, C, \Delta_2}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, B \vee C, \Delta_2$.

1.r.2. $\Delta \ni D = B \wedge C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{\Gamma \to \Delta_1, B, \Delta_2\ ;\ \Gamma \to \Delta_1, C, \Delta_2}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, B \wedge C, \Delta_2$.

1.r.3. $\Delta \ni D = B \supset C$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{B, \Gamma \to \Delta_1, C, \Delta_2}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, B \supset C, \Delta_2$.

1.r.4. $\Delta \ni D = \neg B$: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \underline{B, \Gamma \to \Delta_1, \Delta_2}$,

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, \neg B, \Delta_2$.

<u>Case 2:</u> <u>Case 0, Case 1 でないとき</u>. 即ち Γ が同じ formula をもたず Δ も同じ formula をもたず. Γ, Δ が $B \vee C$, $B \wedge C$, $B \supset C$, $\neg B$ なる型の formula をもたないとき.

2.1. $\deg(\Gamma \to \Delta) > 0$: (このとき $\Gamma \to \Delta$ は $\mathcal{Q}y_{[F]}$ form をもつ).

2.1.1. $\Gamma \to \Delta$ が $\deg(\tau) < \deg(\Gamma \to \Delta)$ なる $\mathcal{Q}_{\underset{(\tau)}{x}} B(x)$ をもつとき:

D をかゝる $\mathcal{Q}_{x(\tau)} B(x)$ の最も左のものとする.

2.1.1.ℓ. $\Gamma \ni D = \forall_{x(\tau)} B(x)$ ⊛1 のとき: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \dfrac{\Gamma_1, B(\tau), \Gamma_2 \to \Delta,}{}$

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_1, \forall_{x(\tau)} B(x), \Gamma_2 \to \Delta$.

2.1.1.r. $\Delta \ni D = \exists_{x(\tau)} B(x)$ のとき: $US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \dfrac{\Gamma \to \Delta_1, B(\tau), \Delta_2,}{}$

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_1, \exists_{x(\tau)} B(x), \Delta_2$

2.1.2. $\Gamma \to \Delta$ が $\deg(\tau) < \deg(\Gamma \to \Delta)$ なる $\mathcal{Q}_{\underset{(\tau)}{x}} B(x)$ をもたないとき:

このとき, $\deg(\Gamma \to \Delta) = \deg(F)$ なる $\mathcal{Q}\underset{[F]}{y}$ form は $\Gamma \to \Delta$ 内のある1つの formula に $\mathcal{Q}\underset{[F]}{y} B(y)$ と(冠頭に)現われる. これらのうち最も左のものを $D = \mathcal{Q}\underset{[F]}{y} B_1(y)$ とする.

2.1.2.ℓ. $\Gamma \ni D = \exists\underset{[F]}{y} B_1(y)$ のとき: Γ 内の $\exists\underset{[F]}{y} B_i(y)$ を列挙し.

$US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \dfrac{\Gamma_0, B_1(F), \Gamma_1, B_2(F), \cdots, B_k(F), \Gamma_k \to \Delta,}{}$

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma_0, \exists\underset{[F]}{y} B_1(y), \Gamma_1, \exists\underset{[F]}{y} B_2(y), \cdots, \exists\underset{[F]}{y} B_k(y), \Gamma_k \to \Delta$.

(⊛2 このとき $d(B_1(F)) = \cdots = d(B_k(F))$ が示される.)

2.1.2.r. $\Delta \ni D = \forall\underset{[F]}{y} B_1(y)$ のとき: Δ 内の $\forall\underset{[F]}{y} B_i(y)$ を列挙し.

$US(\Gamma \to \Delta) \overset{def}{=} \dfrac{\Gamma \to \Delta_0, B_1(F), \Delta_1, B_2(F), \cdots, B_k(F), \Delta_k,}{}$

if $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta_0, \forall\underset{[F]}{y} B_1(y), \Delta_1, \forall\underset{[F]}{y} B_2(y), \cdots, \forall\underset{[F]}{y} B_k(y), \Delta_k$.

2.2. $deg(\Gamma \to \Delta)=0$ のとき：($\Gamma\to\Delta$ は $\mathcal{R}\underset{[F]}{y}$ form をもたない。)

2.2.1. $\Gamma\to\Delta$ が $\mathcal{Q}\underset{(\tau)}{x}B(x)$ をもつとき：最も左のものをDとする.

2.2.1.l. $\Gamma \ni D=\forall\underset{(\tau)}{x}B(x)$ のとき： 2.1.1.l と同様に定義する.

2.2.1.r. $\Delta \ni D=\exists\underset{(\tau)}{x}B(x)$ のとき： 2.1.1.r と同様に定義する.

2.1.2. $\Gamma\to\Delta$ が $\mathcal{Q}\underset{(\tau)}{x}B(x)$ form をもたないとき：(このとき $\Gamma\to\Delta$ は原始論理式のみとなる) $US(\Gamma\to\Delta)$ は定義しない.

[註]※1. $\mathfrak{S}_0 = \to \tilde{A}\langle\tau_{11},\dots,\tau_{1n}\rangle,\dots,\tilde{A}\langle\tau_{m1},\dots,\tau_{mn}\rangle$ に US-operation を適用するとき 2.1.1.l. $\Gamma\ni D=\mathcal{Q}x(\tau)B(x)$ の case で $D=\exists x(\tau)B(x)$ とは決してならない. 2.1.1.r. 2.1.2.l. 2.1.2.r も記述した case のみ起る.

[註]※2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{d(US(\Gamma\to\Delta)) = d\Gamma_0,\ dB_1(F),\ d\Gamma_1,\ dB_2(F),\dots,\ dB_k(F),\ d\Gamma_k \to d\Delta}{dB_1(F),\ d\Gamma_0,\dots,\ d\Gamma_k \to d\Delta}\ \text{contructions Exchanges}}{\exists y\, dB_1(y),\ d\Gamma_0,\dots,\ d\Gamma_k\to d\Delta}\ \exists^*\text{left. (LK*)}}{d\Gamma_0,\ d\exists\underset{[F]}{y}B_1(y),\ d\Gamma_1\ d\exists\underset{[F]}{y}B_2(y),\dots\ d\exists\underset{[F]}{y}B_k(y),\ d\Gamma_k\to d\Delta}\ \text{weakenings Exchanges}$$

$d(\Gamma\to\Delta)$''

と adjust される. see→ A Method for Obtaining Proof Figures of Valid Formulas in the First Order Predicate Calculus. Comm. Math. Univ. St. Pauli by T. Oshiba. P.49−61. Vol.30. No.1. 1981

EXAMPLE $A=\forall y_1(\neg\forall x_1((\exists y_2 P(x_1,y_2))\vee P(x_1,y_1))\vee\exists x_2 P(y_1,x_2))$

(0) A の付随式 $\tilde{A}\langle x_1,x_2\rangle=\underset{[f_1]}{\forall y_1}(\neg\underset{(x_1)}{\forall x_1}((\underset{[f_2(x_1)]}{\exists y_2} P(x_1,y_2))\vee P(x_1,y_1))\vee\underset{(x_2)}{\exists x_2}P(y_1,x_2))$

を作り, $sb\,\tilde{A}\langle x_1,x_2\rangle=\neg(P(x_1,f_2(x_1))\vee P(x_1,f_1))\vee P(f_1,x_2)$ を$D(x_1,x_2)$とおく.

(I) $D(\tau_{11},\tau_{12})\vee\dots\vee D(\tau_{m1},\tau_{m2})$ が恒真となる $m\geq 1$ と $\tau_{ij}\in H(\tilde{A})$ を探す.

肯定的に"$m=2$, $D(f_1,f_2(f_1))\vee D(f_1,f_1)$ が恒真"とみつかる.

(実際 $(\neg(P(f_1,f_2(f_1))\vee P(f_1,f_1))\vee P(f_1,f_2(f_1)))\vee(\neg(P(f_1,f_2(f_1))\vee P(f_1,f_1))\vee P(f_1,f_1))$
は $\neg(P_0\ \vee P_1\ )\vee\ P_0\ )\vee(\neg(P_0\vee P_1)\vee P_1)$ 故恒真)

(II) そこで $\mathfrak{S}_0=\to\tilde{A}\langle f_1,f_2(f_1)\rangle,\tilde{A}\langle f_1,f_1\rangle$ を最下式とし

((phase 1)) $\mathfrak{S}_0$ に US-operation を適用し, pseudo-proof $\mathcal{P}_1=\mathbb{US}[\mathfrak{S}_0]$ を作る.

pseudo-proof $\mathcal{P}_1 = \mathcal{WS}[\mathfrak{S}_0]$ Fig. 2

rul No. ↓

draw upwards

$$P(f_1, f_2(f_1)) \to P(f_1, f_2(f_1)) \quad \text{weakening}$$
$$P(f_1, f_2(f_1)) \to P(f_1, f_2(f_1)),\ P(f_1, f_1)$$
$$2.2.1.r \quad \overline{}\ \exists r.$$
$$P(f_1, f_2(f_1)) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ P(f_1, f_1)$$
$$2.1.2.l \quad \overline{}\ \exists^* l.$$
$$\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(f_1, y_2) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ P(f_1, f_1)$$
$$2.1.1.r \quad \overline{}\ \exists r.$$
$$\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(f_1, y_2) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)$$

$$P(f_1, f_1) \to P(f_1, f_1) \quad \text{weakening}$$
$$P(f_1, f_1) \to P(f_1, f_2(f_1)),\ P(f_1, f_1)$$
$$2.2.1.r \quad \overline{}\ \exists r$$
$$P(f_1, f_1) \to P(f_1, f_2(f_1)),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)$$
$$2.2.1.r \quad \overline{}\ \exists r.$$
$$P(f_1, f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)$$

$$1.l.1 \quad \overline{}\ \vee l.$$
$$(\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(f_1, y_2)) \vee P(f_1, f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)$$
$$2.1.1.l \quad \overline{}\ \forall l.$$
$$\underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)$$
$$0.1 \quad \overline{}\ \text{weakening.l.}$$
$$\underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1),\ \underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)$$
$$1.r.4. \quad \overline{}\ \neg r$$
$$\underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \neg \underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1)),\ \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)$$
$$1.r.1 \quad \overline{}\ \vee r.$$
$$\underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1) \to \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \neg \underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1)) \vee \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)$$
$$1.r.4. \quad \overline{}\ \neg r.$$
$$\to \neg \underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1)),\ \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \neg \underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1)) \vee \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)$$
$$1.r.1 \quad \overline{}\ \vee r.$$
$$\to \neg \underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1)) \vee \underset{(f_2(f_1))}{\exists x_2} P(f_1, x_2),\ \neg \underset{(f_1)}{\forall x_1} ((\underset{[f_2(f_1)]}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, f_1)) \vee \underset{(f_1)}{\exists x_2} P(f_1, x_2)$$
$$(※)\ 2.1.2.r \quad \overline{}\ \forall^* r$$
$$\mathfrak{S}_0 = \to \underbrace{\underset{[f_1]}{\forall y_1} \{\neg \underset{\underline{(f_1)}\ x_1}{\forall x_1} ((\underset{\underline{[f_2(f_1)]}\ x_1}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, y_1)) \vee \underset{\underline{(f_2(f_1))}\ x_2}{\exists x_2} P(y_1, x_2)}_{\tilde{A}\langle \frac{f_1}{x_1},\ \frac{f_2(f_1)}{x_2} \rangle},\ \underbrace{\underset{[f_1]}{\forall y_1} \{\neg \underset{\underline{(f_1)}\ x_1}{\forall x_1} ((\underset{\underline{[f_2(f_1)]}\ x_1}{\exists y_2} P(x_1, y_2)) \vee P(x_1, y_1)) \vee \underset{\underline{(f_1)}\ x_2}{\exists x_2} P(y_1, x_2)\}}_{\tilde{A}\langle \frac{f_1}{x_1},\ \frac{f_1}{x_2} \rangle}$$

((phase 2)) cl-op. により ( )'s, [F]'s を除き
((phase 3)) α-op. により max. Skolem term
f_1, $f_2(f_1)$ を α_{f_1}, $\alpha_{f_2(f_1)}$ におきかえれば
$\to \underbrace{A, A}_{m=2}$ に到る cut-free LK proof を得る.

但し(※)は

$$\left\{ \begin{array}{l} \to cl(B_1(f_1)),\ cl(B_2(f_1)) \\ \hline \to cl(B_1(f_1)) \\ \hline \to \forall y_1\, cl(B_1(y_1)) \\ \hline \to \forall y_1\, cl(B_1(y_1)),\ \forall y_1\, cl(B_2(y_1)) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{contraction} \\ (\because)\ cl(B_1(f_1)) = cl(B_2(f_1)) \\ \forall\text{right} \\ \text{weakening} \end{array}$$

を挿入する. (rule 2.1.2 の註参照)